

Série 10

Solution 41. On note X_i le nombre de requêtes par seconde sur la ligne i et $Z = \sum_{i=1}^8 X_i$ le nombre total de requêtes par seconde. On sait que $E(X_i) = 20$. En l'absence d'informations supplémentaires dans l'énoncé, il est naturel de supposer que les X_i suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$. Sous cette hypothèse, on a alors $\text{Var}(X_i) = 20$.

a) La somme Z des requêtes par seconde est une variable aléatoire de moyenne

$$E(Z) = \sum_{i=1}^8 E(X_i) = 20 \times 8 = 160,$$

donc l'inégalité de Markov donne $\Pr(Z \geq 500) \leq 160/500 = 0.32$.

b) Puisque les X_i sont indépendants, on a

$$\text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^8 \text{Var}(X_i) = 8 \times 20 + 0 = 160$$

donc, utilisant le fait que $E(Z) = 160$,

$$\Pr(Z \geq 500) = \Pr\{Z - E(Z) \geq 500 - E(Z)\} \leq \Pr(|Z - E(Z)| \geq 340) \leq \frac{160}{340^2} = 0.0013,$$

on l'on a mis $X = Z - E(Z)$ et $a = 340$ dans l'inégalité énoncé dans les notes de cours et noté que $E(X^2) = \text{var}(Z) = 160$.

Solution 42. On note A, B, C les variables aléatoires des temps de calcul pour chacune des trois sections du programme.

a) On a $\text{cov}(A, C) = \text{corr}(A, C)\sigma_A\sigma_C = 0.2 \times 2.5 \times 1.3 = 0.65$.

b) On a

$$\begin{aligned} E(T) &= E(A + B + C) = E(A) + E(B) + E(C) = 5.5 + 3.4 + 4.5 = 13.4, \\ \text{var}(T) &= \text{var}(A + B + C) \\ &= \text{var}(A + C) + \text{var}(B) \\ &= \text{var}(A) + \text{var}(C) + 2\text{cov}(A, C) + \text{var}(B) \\ &= 2.5^2 + 1.3^2 + 2 \times 0.65 + 2.6^2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

c) Le temps de calcul de la section B est la somme de 100 temps de calculs identiquement distribués et indépendants. D'après le théorème central limite, la distribution de B est approximativement normale. Ses paramètres sont ceux obtenus empiriquement, $B \sim \mathcal{N}(3.4, 6.76)$.

d) La loi de T est approximativement normale comme somme de lois normales avec $T \simeq \mathcal{N}(13.4, 16)$. On a alors

$$\Pr(T \leq 10) = \Pr\left(\frac{T - 13.4}{\sqrt{16}} \leq \frac{10 - 13.4}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(-0.85) \approx 0.20,$$

et

$$\Pr(T \geq 20) = \Pr\left(\frac{T - 13.4}{\sqrt{16}} \geq \frac{20 - 13.4}{\sqrt{16}}\right) = 1 - \Phi(1.65) \approx 0.05.$$

Solution 43. Pour i allant de 1 à 50, notons X_i la variable aléatoire représentant la différence entre le $i^{\text{ème}}$ nombre réel et sa valeur arrondie. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées et suivent chacune une loi uniforme sur $(-0,5, 0,5)$, ainsi $E(X_i) = 0$ et $\text{var}(X_i) = 1/12$ pour tout i . Alors la moyenne des $n = 50$ erreurs satisfait

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n \times 12}\right)$$

par le théorème de la limite centrale. Ainsi, il nous faut calculer (par symétrie de la loi de $\bar{X}$ autour de zéro)

$$\Pr(|\bar{X}| > 0.1) = 2\Pr(\bar{X} \leq -0.1) = 2\Pr\left\{\sqrt{50 \times 12}(\bar{X} - 0) \leq \sqrt{50 \times 12}(-0.1 - 0)\right\}$$

c'est à dire

$$\Pr(|\bar{X}| > 0.1) \approx 2\Phi(-\sqrt{6}) = 2\left\{1 - \Phi(\sqrt{6})\right\} \approx 0.0143.$$

Pour la seconde partie, on veut trouver n tel que

$$\varepsilon \geq \Pr(|\bar{X}| > 0.1) \approx 2\Phi\left(-\sqrt{12n/100}\right) \Leftrightarrow n \geq 100z_{1-\varepsilon/2}^2/12,$$

où $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = -z_{1-\alpha}$ pour $\alpha \in (0, 1)$.

Solution 44. a) La démonstration de ce résultat est assez simple sous l'hypothèse que $g(x)$ est dérivable et $g'(\mu) \neq 0$. D'après le théorème central limite, la distribution de $\bar{X}$ est approximativement normale $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ c'est à dire

$$Z_n = (\bar{X} - \mu)/\sqrt{\sigma^2/n} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Ensuite, le théorème de la valeur moyenne (c'est à dire l'approximation du premier ordre d'une série de Taylor) donne

$$g(\bar{X}) \doteq g(\mu) + g'(\mu)(\bar{X} - \mu).$$

Réarranger les termes donne

$$\sqrt{n} \frac{g(\bar{X}) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma} \doteq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}.$$

Étant donné que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

par hypothèse, il en résulte immédiatement que

$$\sqrt{n} \frac{g(\bar{X}) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1),$$

et ainsi que

$$\Pr\left\{\sqrt{n} \frac{g(\bar{X}) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma} \leq x\right\} \doteq \Phi(x),$$

ou, autrement dit,

$$g(\bar{X}) = g(\mu + \sigma Z_n/n^{1/2}) \sim \mathcal{N}\{g(\mu), \sigma^2 g'(\mu)^2/n\}$$

pour n grand.

- b) Quand X_i suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, $E(X_i) = \lambda$ et $\text{var}(X_i) = \lambda$. Alors, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\lambda, \lambda/n)$. En utilisant a) pour $g(x) = 2x^{1/2}$ qui est une fonction dérivable et $g'(\mu) = \lambda^{1/2} \neq 0$, on obtient

$$2\sqrt{n}\{\bar{X}^{1/2} - \mu^{1/2}\} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$$

- c) Quand X_i suivent une loi gaussienne alors $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ et pour $g(x) = 1/x$ qui est une fonction dérivable et $g'(\mu) = -1/\mu^2 \neq 0$ pour $\mu \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{n}\{1/\bar{X} - 1/\mu\} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma^2/\mu^4).$$

Si $\mu = 0$, la loi asymptotique met probabilité 0.5 sur $\pm\infty$, car, pour tout $y < 0$,

$$\begin{aligned} \Pr(1/\bar{X} < y) &= \Pr(1/\bar{X} < y \mid \bar{X} > 0)\Pr(\bar{X} > 0) + \Pr(1/\bar{X} < y \mid \bar{X} \leq 0)\Pr(\bar{X} \leq 0) \\ &= \frac{1}{2}\Pr(1/\bar{X} < y \mid \bar{X} \leq 0) \\ &= \frac{1}{2}\Pr(\bar{X} > 1/y \mid \bar{X} \leq 0) \\ &= \frac{1}{2}\Pr(1/y < \bar{X} \leq 0)/\Pr(\bar{X} \leq 0) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \left[1/2 - \Phi\{\sqrt{n}/(y\sigma)\} \right] \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Puisque la loi de $1/\bar{X}$ est symétrique autour de zéro, $\Pr(1/\bar{X} > y) \rightarrow 1/2$ pour tout $y > 0$.